Bölüm 3: Vektörler

Kavrama Soruları

1- Neden vektörlere ihtiyaç duyarız?
2- Vektör ve skaler arasındaki fark nedir?
3- Neden vektörel bölme işlemi yapılamaz?
4- π sayısı vektörel mi yoksa skaler bir nicelik midir?
5- Hızı 5 m/s olan bir tren üzerinde hareket eden bir aracın hızı 4 m/s ise bu aracın yere göre hızı nedir?

Konu İçeriği

Sunuş

Fizikte yaygın olarak hem sayısal hem de yön özelliğine sahip olan fiziksel niceliklerle çalışma gereksinimi duyarız. Örneğin hız, ivme, kuvvet vs. gibi. Bu fiziksel niceliklerin sayısal değerlerinin yanında yön özellikleri de vardır ve bu yön özelliklerini bu niceliklerle yapılacak işlemlere de yansıtılması gerekir. Örneğin iki hız niceliğini toplamamız veya çıkarmamız gerektiği zaman sadece bu niceliklerin büyüklüklerini dikkate aldığımız zaman hatalı bir işlem yapmış oluruz çünkü hızlarının yönü de toplama işleminde en az hızlarının büyüklüğü kadar önemlidir. Örneğin hızı 5 m/s olan bir tren üstünde hızı 3 m/s olan bir aracın hızını skaler olarak toplarsak 8 m/s veya 2 m/s gibi bir hız elde ederiz, oysa ki araç ne tam trenle aynı ne de ters yönde hareket etmiyor ise hızı 2 ile 8 m/s arasındaki her değer olabilir.

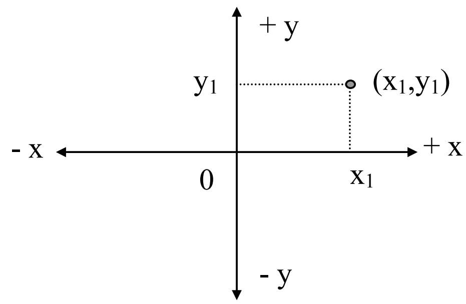
Bu bölümde önce yaygın olarak kullanılan koordinat sistemlerini, vektörel ve skaler niceliklerin tanımlarını, vektörlerin bazı özelliklerini ve son olarak da birim vektörleri ve herhangi bir vektörün birim vektörler cinsinden nasıl ifade edilebileceğini göreceğiz.

3-1 Koordinat Sistemleri

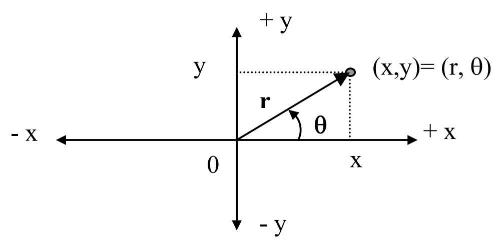
Bir cismin konumunu tanımlamak için bir yönteme gereksinim duyarız. Bu konum tanımlaması koordinat kullanımı ile sağlanır. Örneğin geçen dersimizde bir doğru boyunca hareket eden bir cismin konumunu belirlemek için tek bir eksen kullandık (x-ekseni) ve cismin konumunu bu doğru üzerindeki sadece bir sayı ile tanımlanmasının yeterli olduğunu öğrendik. Eğer cisim bir doğru boyunca değil de bir düzlemde hareket ediyor ise tek bir eksen ile cismin konumunu belirleyemeyeceğimiz açıktır. Bunun için ikinci bir eksen takımına daha ihtiyacımız vardır. Eğer cisim bir hacim içersinde hareket ediyor ise en az üç eksen takımı ile cismin uzaydaki konumunu kesin olarak belirlememiz gerekecektir.

İki boyuttaki hareketi tanımlamak için birbirine dik olan iki eksen takımı tanımlayacağız ve bu eksenlerin kesiştiği noktayı başlangıç noktası olarak (orijin) alacağız. Eksenlerden yatay olanı x, düşey olanı y ekseni ile isimlendireceğiz. Bu tür koordinat sistemine *Kartezyen*

Koordinat Sistemi veya *Dik Koordinat Sistemi* denir. Bu koordinat sisteminde düzlemdeki herhangi bir nokta (x,y) sayı çifti ile ifade edilebilir. Böylelikle düzlem üzerindeki her noktayı sadece iki sayı ile karışıklığa meydan vermeden temsil edebiliriz.



Dik koordinat sisteminin yanısıra, düzlemdeki bir noktayı temsil etmek için başka koordinat sistemleri de kullanılmaktadır. Bazen düzlemdeki bir noktayı belirlemek için bu noktayı başlangıç noktasına birleştiren bir doğru (r) ve bu doğrunun yatay eksenle (+x) arasındaki açıyı (θ) vererek de yapabiliriz. Bu şekilde tanımlanan koordinat sistemine *Kutupsal* (*Polar) Koordinat Sistemi* denir. Kutupsal koordinat sistemi bazı hareketli cisimlerin konumlarını belirlemede dik koordinatlara göre daha pratik olabilir. Örneğin düzlem üzerinde dairesel hareket yapan bir cismin hareketini kutupsal koordinatlar cinsinden vermek oldukça faydalıdır çünkü dairesel hareket yapan bir cismin yarıçapı değişmeyeceğinden konumunu iki değişken yerine (r,θ) sadece θ açısı ile belirlemek mümkündür.



Kutupsal koordinatlarda konumu belirleyen r ve θ sayı çiftlerinden r, başlangıç noktasını (0,0) cismin konumuna birleştiren doğrunun uzunluğu, θ açısı ise +x ekseninden saat yönünün tersi yönde ölçülen değerdir.

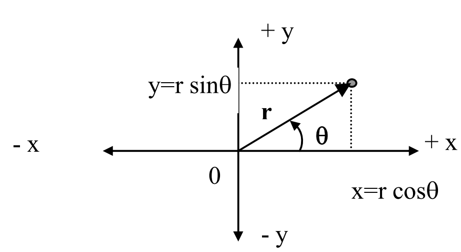
(x,y)= (r, θ)

Dik ve Kutupsal Koordinat Sistemleri Arasındaki İlişki:

Düzlem üzerindeki bir noktanın kutupsal koordinatlardaki konumu (r, θ) biliniyor ise dik koordinat değerlerini (x,y) aşağıdaki şekilde bulabiliriz;

r'nin x- ve y-ekseni üzerindeki izdüşümlerinde

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



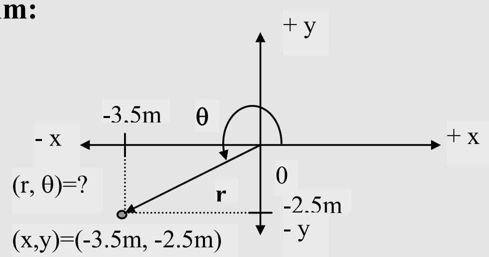
Benzerşekilde dik koordinat değerleri (x,y) biliniyor ise kutupsal koordinat değerleri (r, θ) bulunabilir;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Örnek 3.1 *Bir noktanın xy düzlemindeki kartezyen koordinatları (x,y)=(-3.5 ,-2,5) m dir. Bu noktanın kutupsal koordinatlarını bulunuz.*

Çözüm:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.5m)^2 + (-2.5m)^2} = 4.3m$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.5m}{-3.5m} = 0.714 \qquad \theta = 216^o$$

$(r,\theta)=(4.3,\ 216^o)$ olduğu bulunur.

3-2 Vektör ve Skaler Nicelikler

Vektörler normal sayılar olmadığı için bu bölümde vektörlerin adi sayılardan farklı olduğunu ve bazı özelliklerini göreceğiz.

Vektörel ve skaler nicelikleri tanımlarsak:

Vektör: Hem sayısal (büyüklük) hem de yön özelliğine sahip olan fiziksel nicelik. Örneğin yer değiştirme, hız, ivme, momentum.

Skaler: Tek bir sayı ile belirtilebilen ve yönü olmayan fiziksel nicelik. Örneğin kütle, sıcaklık, sürat gibi fiziksel nicelikler sadece bir sayı (ve tabi uygun bir birim ile) ile tarif edilebildikleri için skaler niceliklerdir.

Vektörlerin Gösterimi:

Vektörel nicelikler, örneğin **A** vektörü gibi, koyu gösterimle **A** veya üzerinde ok ile $\vec{A}$ gösterilir. Bir vektörün büyüklüğü $|\vec{A}|$ olarak gösterilir. Örneğin $\vec{v}$ hız vektörünün büyüklüğü yani sürati $|\vec{v}|$ şeklinde gösterilir. Biz bu gösterimlerden vektörel nicelikleri koyu harflerle yazarak ifade edeceğiz.

3-3 Vektörlerin Bazı Özellikleri

Vektörler normal sayılar olmadığı için bu bölümde vektörel nicelikler ile bildiğimiz bazı aritmetik işlemlerin nasıl yapılacağını göreceğiz.

a) İki Vektörün Eşitliği:

Eğer **A** ve **B** gibi iki vektör aynı büyüklüğe ve aynı yön ve doğrultuya sahip ise bu iki vektör eşit denir Yani;

i) İki vektörün büyüklükleri:

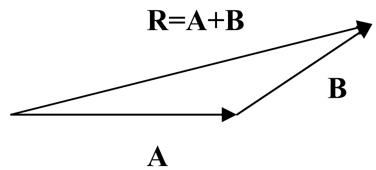
|**A**|=|**B**| eşit ise

ii) İki vektör paralel doğrular boyunca aynı yönü gösteriyorsa **A** // **B**

Bu iki vektörün eşit olduğunu **A**=**B** söyleriz.

b) Vektörlerin Toplanması:

Vektörlerin toplanma kuralları, geometrik yöntemlere uygun olarak tanımlanır.

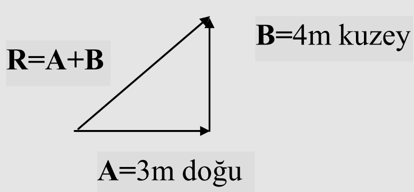


R bileşke vektör= **A**+**B**
R vektörünün büyüklüğü **|R|=(|A|^2+|B|^2)**$^{1/2}$

Vektörlerin geometrik olarak yapılan bu toplama işlemini, vektörleri birim vektörler cinsinden ifade ettikten sonra nasıl daha kolay bir şekilde yapılabileceğini göreceğiz.

Örnek 3.2 *3 metre doğuya doğru daha sonra 4 metre kuzeye doğru yürüdüğümüzü düşünelim. Son konumumuzun başlangıç noktasına göre belirleyen vektör nedir?*

Çözüm:



A=3m doğu
B=4m kuzey
R=A+**B**

$$|R| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2} = \sqrt{(4m)^2 + (3m)^2} = 5m$$

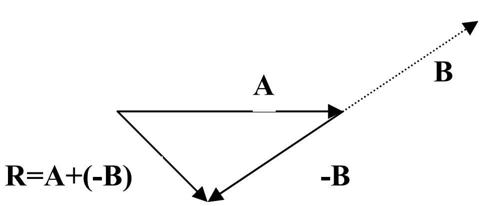
$$\tan\theta = \frac{|B|}{|A|} = \frac{4m}{3m} = 1{,}33 \qquad \theta = 53^o$$

|**R**|=5m, θ=53^o olduğu bulunur.

Vektör toplamının değişme özelliği vardır:

A+**B**=**B**+**A**

c) Vektörlerin Çıkarılması:



R bileşke vektör= **A-B=A**+**(-B)**

R vektörünün büyüklüğü **|R|=(|A|^2+|B|^2)**$^{1/2}$

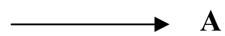
d) Bir Vektörün bir Skaler ile Çarpılması:

Bir **A** vektörünü skaler (k) bir sayı ile çarparsak (bölersek) yeni oluşacak **B** vektörünün doğrultusu A ile aynı olacak, yönü ise k skaler sayısının işaretine (pozitif veya neğatif oluşuna göre) bağlı olacaktır. Büyüklüğü ise k skaler sayısı kadar değişecektir.

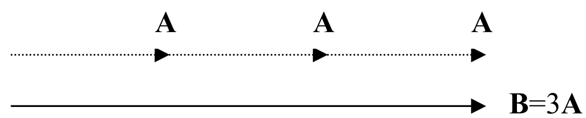
$$\mathbf{B}=k\mathbf{A} \qquad |\mathbf{B}|=(|k\mathbf{A}|^2)^{1/2}=k|\mathbf{A}|$$

Grafiksel olarak gösterirsek:

Diyelim ki elimizde bir **A** vektörü var. Bu vektörü k=3 gibi skaler bir sayı ile çarparsak



k=3 $\mathbf{B}=k\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}=3\mathbf{A}$



B vektörü **A** ile aynı yönlü olup büyüklüğü **A**'nın 3 katıdır.

e) Vektörlerin Çarpımı:

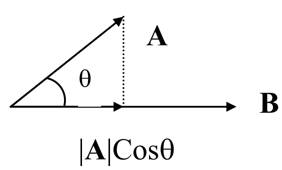
Vektörleri iki şekilde birbirleri ile çarpabiliriz. Bu çarpımlar *Skaler Çarpımı* ve *Vektörel Çarpımı*'dır.

i) Skaler Çarpım

A ve **B** vektörlerinin ***skaler*** çarpımı

$\mathbf{A}.\mathbf{B}=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\theta=C$ şeklinde tanımlanır.

Skaler çarpımda, vektörlerden birinin diğeri üzerindeki izdüşümü alınarak (iki vektörün aynı yöndeki bileşenleri işleme alınarak) çarpma işlemi yapılır. İki vektörün skaler çarpımının sonucu bir skaler sayıdır. Burada θ, **A** ve **B** vektörleri arasındaki açıdır.



$$\mathbf{A}.\mathbf{B}=(A\cos\theta).\mathbf{B}=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\theta=C$$

ii) Vektörel Çarpım

A ve **B** vektörlerinin ***vektörel*** çarpımı

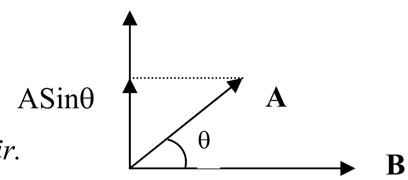
$\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{B}=\mathbf{C}$ şeklinde tanımlanır.

Vektörel çarpımda, vektörlerden biri ile diğerinin dik bileşeni alınarak (iki vektör birbirine dik bileşenleri işleme alınarak) çarpma işlemi yapılır. İki vektör birbirine göre dik olduğundan vektörel çarpımının sonucu yine bir vektördür. Burda θ, **A** ve **B** vektörleri arasındaki açıdır.

C vektörünün büyüklüğü

$|\mathbf{A}x\mathbf{B}|=|\mathbf{C}|=(|\mathbf{A}|\sin\theta)|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\sin\theta$

Yönü ise **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzleme *diktir.*



Bu iki çarpıma örnekler skaler çarpım için Bölüm 7'de, vektörel çarpım için ise Bölüm 10'da ayrıntılı olarak verilecektir.

f) Vektörlerin Bölümü:

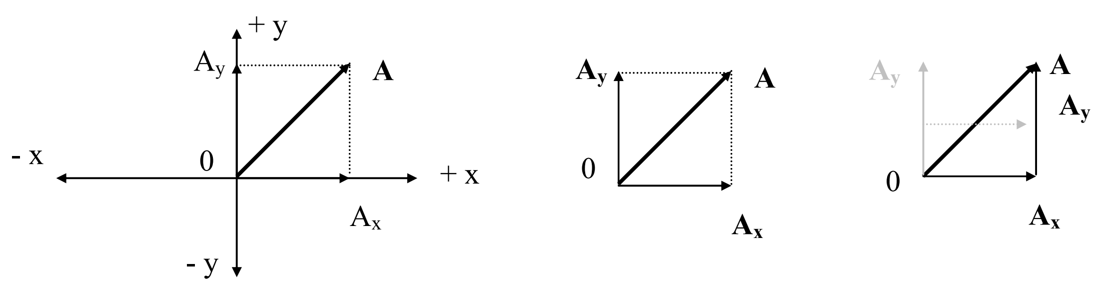
Diğer vektörel işlemlerin aksine iki vektörü birbirlerine bölemeyiz! Bunun sebebi vektörlerin sahip olduğu yön özelliğini bölme işlemine *yansıtamayışımızdandır*. Yani vektörel bölme tanımsızdır!

3-4 Bir Vektörün Bileşenleri ve Birim Vektörler

Vektörleri geometrik olarak toplamak veya diğer vektörel işlemleri, çok hassas sonuçlar elde edilmek istendiğinde ve üç boyutlu problemlerde yeterli değildir ve fazlaca pratik değildir. Bu kesimde, bu tür vektörel işlemleri dik koordinat sisteminde eksenler boyunca tanımlayacağımız birim vektörleri kullanarak nasıl daha pratik bir şekilde yapılabileceğini göreceğiz.

Vektörleri Bileşenlerine Ayırma:

Bir **A** vektörü dik koordinat sisteminde bileşenlerine aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi ayrılabilir. Bu **A** vektörünün her eksen üzerindeki izdüşümlerine bu vektörün bileşenleri denir.



A vektörünü $\mathbf{A_x}$ ve $\mathbf{A_y}$ bileşen vektörlerinin toplamı şeklinde ifade edebiliriz.

$$\mathbf{A}=\mathbf{A_x}+\mathbf{A_y}$$

$\mathbf{A_x}$: **A** vektörünün x-ekseni boyunca iz düşümü $|A_x|=|A|\cos\theta$
$\mathbf{A_y}$: **A** vektörünün y-ekseni boyunca iz düşümü $|A_y|=|A|\sin\theta$

Bileşenler cinsinden **A** vektörünün büyüklüğü $|A| = \sqrt{|A_x|^2 + |B_y|^2}$

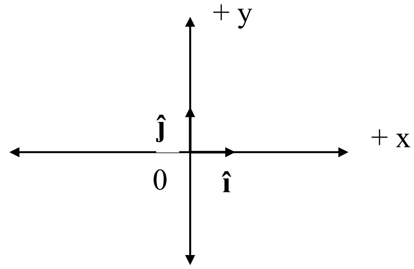
ve +x ekseni ile yaptığı açı $\theta = \arctan(\frac{A_y}{B_x}) = \tan^{-1}(\frac{A_y}{B_x})$ şeklinde ifade edilebilir.

Birim Vektörler:

Herhangi bir vektör birim vektörler cinsinden ifade edilir. Bunun için uzayda belli özel doğrultuları gösteren birim vektörler tanımlamamız gerekecektir. Birim vektörü tanımlarsak;

Birim Vektör: Büyüklüğü bir birim olan, yönü özel bir doğrultu boyunca seçilen (x, y gibi), boyutsuz bir vektördür.

Birim vektörler düzlemde veya uzayda sabit bir yönü belirtmede kullanılırlar, başka bir fiziksel anlamları yoktur. Dik koordinat sisteminde birim vektörler aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

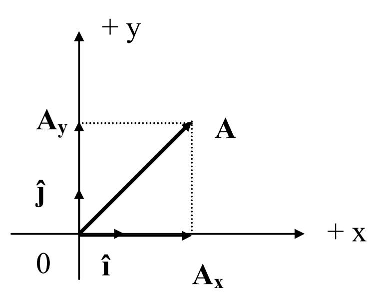


x-ekseni boyunca tanımlayacağımız birim vektör= **î**
y-ekseni boyunca tanımlayacağımız birim vektör= **ĵ**

Bu birim vektörlerin büyüklükleri eşittir |**î**|=|**ĵ**|=1,

Yönleri ise; **î**: +x yönünde; **-î**: -x yönünde
ĵ: +y yönünde; **-ĵ**: -y yönünde

Bu birim vektörler yardımı ile xy düzlemindeki içersindeki herhangi bir vektörü, örneğin **A** vektörünü, bu birim vektörler cinsinden ifade edebiliriz.



A_x: **A** vektörünün x ekseni üzerindeki iz düşümü

A_y: **A** vektörünün y ekseni üzerindeki iz düşümü

A=**A$_x$**+**A$_y$**=A$_x$**î**+A$_y$**ĵ**

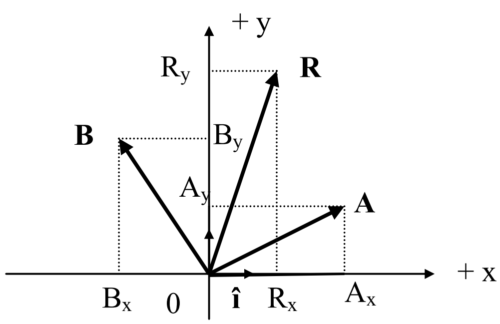
Bu sayede herhangi bir vektörü bileşenleri cinsinden ifade edip, daha önce yaptığımız vektörel işlemleri geometrik olarak değil de vektörlerin bileşenler ile kolayca yapabiliriz.

Örneğin daha önce geometrik olarak yaptığımız iki vektörün toplama işlemini göz önüne alalım. **A** ve **B** vektörlerini birim vektörler cinsinden ifade edersek:

$$\mathbf{A}==A_x\hat{\mathbf{\imath}}+A_y\hat{\mathbf{\jmath}}$$
$$\mathbf{B}==B_x\hat{\mathbf{\imath}}+B_y\hat{\mathbf{\jmath}}$$

şeklinde yazarız.
Bu iki vektörün toplamı:

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x\hat{\mathbf{\imath}}+A_y\hat{\mathbf{\jmath}})+(B_x\hat{\mathbf{\imath}}+B_y\hat{\mathbf{\jmath}})=(A_{x+}B_{x)}\hat{\mathbf{\imath}}+(A_{y+}B_{y)}\hat{\mathbf{\jmath}}=R_x\hat{\mathbf{\imath}}+R_y\hat{\mathbf{\jmath}}$$



Toplam vektörün büyüklüğü:

$$|R|=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{(A_x+B_y)^2+(A_y+B_y)^2}$$

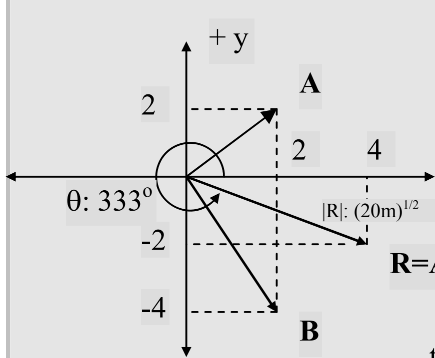
+x ekseni ile yaptığı açı:

$$\tan\theta=\frac{R_y}{R_x}=\frac{A_y+B_y}{A_x+B_x} \quad \text{bulunur.}$$

Görüldüğü gibi kaç tane vektör olursa olsun bu vektörleri birim vektörler cinsinden ifade ederek gerekli işlemleri her bir eksen üzerinden yapıp sonuç (bileşke) vektörün bileşenlerini bulabiliriz.

Örnek 3.3 *xy düzleminde yer alan ve* $\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{\imath}}+2\hat{\mathbf{\jmath}}$ *m ve* $\mathbf{B}=2\hat{\mathbf{\imath}}-4\hat{\mathbf{\jmath}}$ *m ile verilen* ***A*** *ve* ***B*** *vektörlerinin toplamını bulunuz.*

Çözüm:



$\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{\imath}}+2\hat{\mathbf{\jmath}}$ m $\quad A_x=2m,\ A_y=2m$
$\mathbf{B}=2\hat{\mathbf{\imath}}-4\hat{\mathbf{\jmath}}$ m $\quad B_x=2m,\ B_y=-4m$

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=(2\hat{\mathbf{\imath}}+2\hat{\mathbf{\jmath}})+(2\hat{\mathbf{\imath}}-4\hat{\mathbf{\jmath}})=(2+2)\hat{\mathbf{\imath}}+(2-4)\hat{\mathbf{\jmath}}\ m$$

$$\mathbf{R}=(4)\hat{\mathbf{\imath}}+(-2)\hat{\mathbf{\jmath}}\ m \Rightarrow R_x=4m,\ R_y=-2m$$

R=A+B

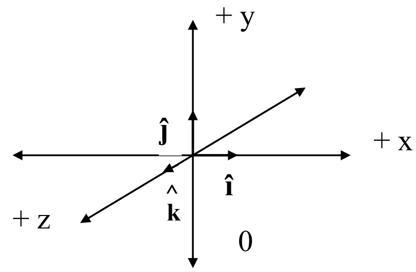
$$|R|=\sqrt{|R_x|^2+|R_y|^2}=\sqrt{(4m)^2+(-2m)^2}=\sqrt{20}m$$

$$\tan\theta=\frac{|R_y|}{|R_x|}=\frac{-2m}{4m}=-0{,}5 \qquad \theta=\tan^{-1}(-0{,}5)\Rightarrow\theta=333^o$$

$|\mathbf{R}|=(20)^{1/2}$ m, $\theta=333^o$ olduğu bulunur.

Üç boyuttaki hareketi tanımlamak için üçüncü bir eksene (z-ekseni) ihtiyaç duyarız. z ekseni boyunca tanımlayacağımız birim vektörü ise $\hat{k}$ ile gösteririz. Buna göre uzayda tanımlı herhangi bir **A** vektörünü birim vektörler cinsinden

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$



şeklinde tanımlayabiliriz.

Bölüm 3'ün Sonu

Kaynak:

Bu ders notları,
R. A. Serway ve **R. J. Beichner** (Çeviri Editörü: K. Çolakoğlu), **Fen ve Mühendislik için FİZİK-I** (Mekanik), Palme Yayıncılık, 2005.

kitabından derlenmiştir.